

произведения неотрицательного оператора P и унитарного (ортогонального) оператора U .

При этом оператор P определен однозначно, а если A обратим, то U определен однозначно

Док-во.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ - ортонормированная пара базисов

Положим
$$\begin{cases} U e_k = f_k \\ P f_k = \sigma_k f_k \end{cases}$$

Тогда U - унитарный (ортон.), т.к. переводит ОНБ в ОНБ

При этом $A = P U$, т.к. $A e_k = P(U e_k) = P f_k = \sigma_k f_k$

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^* = \underbrace{(U \cdot \Sigma \cdot U^*)}_{\text{симм } U} \underbrace{U V^*}_P$$

"единственность"

Пусть $A = P U$ - каноническое разложение, тогда

$A^* = U^* P^*$, т.е. $P = \sqrt{A A^*}$, кот. симм. и определен однозначно

Если A обратим, то $A^* A$ также обратим,

поэтому $\sigma_k \neq 0 \Rightarrow$ обратим $P \Rightarrow$ тогда $U = P^{-1} A$

Глава 7. Тензоры

§1. Индексное обозначение.

Объекты

3 независимых переменных x, y, z
Можно обозначить одной, различать по индексам x_1, x_2, x_3
или более компактно x_r ; $r = 1, 2, 3$
или x^r , $r = 1, 2, 3$
(не путать с возведением в степень)

Определение Объекты, кот. зависят только от одного индекса, наз. объектами первого порядка

$x_1 x_2 x_3 / x^1 x^2 x^3$ - компоненты объекта

Определение Объекты второго порядка зависят от двух индексов

Индексы могут быть верхние и нижние $\Rightarrow$

Объекты 2 порядка могут быть 3 типов

$$X_{2s}, X_2^s, X^{2s}$$

каждый объект 2 порядка имеет 9 компонентов

Определение Объект зависящий от m верхних и n нижних индексов наз. объектом ранга (m, n)
Без индексов - объект нулевого порядка

2 сокращения

1) повторяющийся индекс означает суммирование
"правило суммирования Эйнштейна" от 1 до 3 (от 1 до n)

например $a_r x^r = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$

2) свободные индексы пробегают значения от 1 до 3 (от 1 до n)

Операции над объектами.

- Сумма объектов (одного ранга!)

$$Z_{st}^r = X_{st}^r + Y_{st}^r$$

- Произведение объектов

$$Z_{st}^{rmn} = X_{st}^r Y^{mn}$$

- Свертка

$$X_{pst}^{rp} = X_{1st}^{r1} + X_{2st}^{r2} + X_{3st}^{r3};$$

$$X_{kst}^{rp} \text{ по индексам } k \text{ и } r.$$

Определение Объект наз. симметричным отн. двух нижних индексов, если он не изменяется при перемещении этих индексов

Определение Объект наз. абсолютно симметричным, если не изменяется при перемещении любых индексов.

например: $X_{rst} = X_{rts} = X_{str} = X_{srt} = X_{trs} = X_{tsr}$

Определение Объект наз. антисимметричным отн. двух нижних индексов, если при перестановке индексов меняется знак.

Определение Объект наз. абс. антисимметричным, если он антисимметричен отн. всех пар нижних индексов

Символ Кронекера и леви-Чивиты

Определим 3 объекта δ_{rs} , δ^{rs} , δ_r^s $\begin{cases} 1, & r=s \\ 0, & r \neq s \end{cases}$

Символ Кронекера являются симметричными объектами
объекты ϵ_{rst} и ϵ^{rst}

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & i,j,k \text{ - четная перестановка чисел } 1,2,3 \\ -1, & i,j,k \text{ - нечетная перестановка} \\ 0, & \text{среди } i,j,k \text{ есть хотя бы 2 совпад.} \end{cases}$$

(ϵ^{ijk})

Абсолютно антисимметричный объект - символ леви-Чивиты

Опредетелени

есть объект $x_s^r \Rightarrow \det x_s^r = \epsilon_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k$

$$\det x_s^r = \det \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix}$$

опредетель = сумма произведений $x_1^r x_2^s x_3^t$ элементов матрицы по одному из каждой строки и столбца
знак $\oplus$, если r,s,t - четная перестановка
 $\ominus$, если r,s,t - нечетная

$$\det x_s^r = \epsilon_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k = \epsilon_{ijk} x_i^1 x_j^2 x_k^3$$

свойства определитель при перемене мест любых двух столбцов определитель меняет знак

Законы физики выражаются уравнениями, кот. записываются в той или иной системе координат
Но сами эти законы инвариантны, т.е. не зависят от системы координат

В разных с.к. один и тот же физ. закон может записываться различными уравнениями
след, надо научиться выделять те св-ва уравнений, кот. не зависят от координатного представления.

§2. Тензоры в лин. пространстве

Пусть V - лин. пр-во размерности n
 $e_1, \dots, e_n$ - базис V

Геометрические объекты - векторы, лине. операторы, билин. формы

Фиксируя базис ставим в соответствие каждому объекту упорядоченный набор чисел - координаты

Пусть $e'_1 \dots e'_n$ - другая система коорд.

$$[e'_1 \dots e'_n] = [e_1 \dots e_n] C \quad (1)$$

матрица перехода $= (C_{ij}^j)_{i-\text{столбец}, j-\text{строка}}$

$$e'_i = C_{ij}^i e_j; \quad e_i = B_{ij}^i e'_j$$

$B = (B_{ij}^i)$ - обратная матрица

$$C_{ij}^i B_{jk}^k = \delta_{ik} \quad \left(\sum C_{ij}^i B_{jk}^k; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1; i=j \\ 0; i \neq j \end{cases} \right)$$

$$B_{ij}^i C_{jk}^k = \delta_{ik}$$

вектор (контравариантный вектор)

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i = \sum_{i=1}^n {}'x^i e'_i$$

$$x = x^i e_i = {}'x^j e'_j$$

$$x = {}'x^j e'_j = {}'x^j C_{ij}^j e_i = x^i e_i$$

$$x^i = C_{ij}^i {}'x^j$$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} {}'x^1 \\ \vdots \\ {}'x^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_e &= C \bar{x}_{e'} \\ {}'x^j &= B_{ij}^j x^i \end{aligned} \quad (2)$$

Любой объект a^r , компоненты кот. преобразуются по закону (2) наз. контравариантными тензорами ранга 1 (или контравариантными векторами)

Лин. форма (линейный функционал)

ковариантный вектор

$$f: V \rightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbb{C})$$

$$f(e_i) = f_i$$

$$f(x) = f(x^i e_i) = f_i x^i = f_i C_{ij}^j {}'x^j = {}'f_j {}'x^j$$

$${}'f_j = C_{ij}^j f_i$$

$$[f'_1 \dots f'_n] = [f_1 \dots f_n] C$$

т.е. компоненты лин. функционала преобразуются так же как векторы базиса

Любой объект a_r , компоненты кот. преобразуются по закону 1 наз. ковариантными тензорами ранга 1 (ковариантными векторами)

Линейный оператор.

$$A = (a_{ij}^i)$$

$$Ae_j = a_{ij}^i e_i$$

компоненты a_{ij}^i определяются путем разложения базисных векторов

$$\begin{aligned} Ae_j^i &= A(c_{ij}^i e_j) = c_{ij}^i A(e_j) = c_{ij}^i a_{jm}^m e_m = \\ &= \underbrace{c_{ij}^i a_{jm}^m}_{a_{ij}^k} e_k^i \end{aligned}$$

$$A = C^{-1} A C$$

Билинейная форма

$$Q' = C^T Q C$$

Q - матрица билинейной формы

$$q_{km} = C_k^i C_m^j q_{ij}$$

Определение В n -мерном л.н. пр-ве задан тензор T типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ если

1) для каждого базиса задан упорядоченный набор чисел $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ ($1 \leq i_1 \leq n \dots 1 \leq i_p \leq n$) ($1 \leq j_1 \leq n \dots 1 \leq j_q \leq n$)

2) при переходе от базиса e к базису e' эти числа преобразуются по формуле

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \sum_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_p \\ \beta_1 \dots \beta_q}} C_{\beta_1}^{\alpha_1} C_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots C_{\beta_q}^{\alpha_q} v_{\beta_1}^{i_1} \dots v_{\beta_p}^{i_p} T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}$$

Нижние индексы наз. ковариантными, верхние - контравариантными.

Закон преобразования - тензорный закон $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$$T_{\beta}^{\alpha} = C_{\beta}^{\gamma} v_{\gamma}^{\alpha} T_{\gamma}^{\delta}$$

$$\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_p)$$

$$\beta = (\beta_1 \dots \beta_q)$$

$$C_{\beta}^{\alpha} = C_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots C_{\beta_q}^{\alpha_q}$$

$$v_{\gamma}^{\alpha} = v_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots v_{\gamma_p}^{\alpha_p}$$